Н. В. Макарова

МАГИЧЕСКИЕ КУБЫ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА

Часть II

Данная статья является продолжением статьи «Магические кубы четвёртого порядка»
http://www.natalimak1.narod.ru/kub4.htm

После написания указанной статьи прошло много времени. Исследования магических кубов были отложены надолго; сейчас они возобновились. Получено много интересных результатов. Мной был проведён международный конкурс программирования «Магические кубы из простых чисел», в рамках которого получено несколько уникальных решений. К сожалению, конкурс не привлёк много участников.

В данной статье я изложу все результаты, которые мне удалось получить по магическим кубам четвёртого порядка. Не буду повторять определение магического куба, читатели найдут его в литературе, список которой приведён в первой части статьи.

ОБЩАЯ ФОРМУЛА МАГИЧЕСКОГО КУБА ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА

Сразу замечу, что в этом разделе речь идёт о *простом магическом кубе* (*simple magic cube*), такой куб не обладает никакими дополнительными свойствами. В дальнейшем я опускаю слово “простой”, подразумевая его по умолчанию.

Сначала представлю схему магического куба 4-го порядка (рис. 1):

x1	x2	x3	y1
x4	x5	x6	y2
x7	x8	x9	y3
y4	y5	y6	y7

x10	x11	x12	y8
x13	x14	x15	y9
x16	x17	x18	y10
y11	y12	y13	y14

x19	x20	x21	y15
x22	x23	x24	y16
x25	x26	x27	y17
y18	y19	y20	y21

x28	x29	x30	y22
x31	x32	x33	y23
x34	x35	x36	y24
y25	y26	y27	y28

Рис. 1

Переменные xi (i=1, 2, …, 36) я назвала переменными первого уровня, среди этих переменных есть и свободные и зависимые; переменные yi (i=1, 2, …, 28) – переменные второго уровня, эти переменные все зависимые. На иллюстрации свободные переменные xi выделены зелёным цветом; все зависимые переменные (и xi, и yi) выделены синим цветом. Магическая константа куба s считается свободной переменной; мы можем задавать её значение сами.

По этой схеме я написала систему линейных уравнений, описывающих все свойства магического куба 4-го порядка:

x1+x10+x19+x28=s
x2+x11+x20+x29=s
x3+x12+x21+x30=s
x4+x13+x22+x31=s
x5+x14+x23+x32=s
x6+x15+x24+x33=s
x7+x16+x25+x34=s
x8+x17+x26+x35=s
x9+x18+x27+x36=s
x1+x14+x27+x28+x29+x30+x31+x32+x33+x34+x35+x36=3*s
x1+x2+x3-x15-x26+x28+x31+x34=s
x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+x18+x23+x28=3*s
x1+x4+x7-x17-x24+x28+x29+x30=s

Решение этой системы:

x23 = 2*s + x10 - x18 + x19 - x2 - x3 - x4 - x5 - x6 - x7 - x8 - x9,
x24 = 2*s - x10 - x11 - x12 - x17 - x19 - x2 - x20 - x21 - x3 + x4 + x7,
x26 = 2*s - x10 - x13 - x15 - x16 - x19 + x2 - x22 - x25 + x3 - x4 - x7,
x28 = s - x1 - x10 - x19,
x29 = s - x11 - x2 - x20,
x30 = s - x12 - x21 - x3,
x31 = s - x13 - x22 - x4,
x32 = -s - x10 - x14 + x18 - x19 + x2 + x3 + x4 + x6 + x7 + x8 + x9,
x33 = -s + x10 + x11 + x12 - x15 + x17 + x19 + x2 + x20 + x21 + x3 - x4 - x6 - x7,
x34 = s - x16 - x25 - x7,
x35 = -s + x10 + x13 + x15 + x16 - x17 + x19 - x2 + x22 + x25 - x3 + x4 + x7 - x8,
x36 = s - x18 - x27 - x9

Как вычислять зависимые переменные yi, видно из схемы куба. Например:

y1 = s – x1 – x2 – x3

Таким образом, мы имеем общую формулу простого магического куба 4-го порядка. Программно реализовав эту формулу, я начала поиск магического куба 4-го порядка из различных простых чисел с минимальной магической константой.

Теоретическая минимальная магическая константа такого куба определяется просто, она равна 578 и куб с такой магической константой теоретически может быть составлен, например, из такого набора 64 простых чисел:

277 107 199 43 7 5 61 173 193 103 313 101 331 229 41 29 139 13 167 191 53 127 113 137
19 31 151 149 67 211 97 163 197 271 11 23 307 263 233 37 181 3 47 227 89 83 317 239 17
241 283 281 223 157 71 251 179 131 257 59 73 269 79 109

[См. http://primesmagicgames.altervista.org/wp/forums/topic/order-4-set-of-primes/]

Однако практически мне удалось построить только куб с наименьшей магической константой S=780, вы видите этот магический куб на рис. 2.

17	7	439	317
139	487	107	47
331	59	167	223
293	227	67	193

19	61	281	419
191	199	179	211
337	347	43	53
233	173	277	97

283	443	23	31
421	83	127	149
3	103	433	241
73	151	197	359

461	269	37	13
29	11	367	373
109	271	137	263
181	229	239	131

Рис. 2

В Интернете имеется магический куб из различных простых чисел с магической константой S=4020 (рис. 3). Этот куб построен Gakuho Abe в 1977 году [1]. Решение очень интересное: куб построен из комплементарных пар простых чисел методом окаймления (об этом методе я планирую написать отдельную статью).

Таким образом, мне удалось намного уменьшить известную магическую константу для такого вида магических кубов.

7	1999	17	1997
1753	733	1283	251
257	1277	727	1759
2003	11	1993	13

1873	37	1979	131
311	1549	467	1693
1699	461	1543	317
137	1973	31	1879

233	1013	991	1783
1069	557	1447	947
941	1453	563	1063
1777	997	1019	227

1907	971	1033	109
887	1181	823	1129
1123	829	1187	881
103	1039	977	1901

Рис. 3

В Приложении приведены все простые магические кубы 4-го порядка из различных простых чисел, найденные мной.

Покажу два шаблона из вычетов по модулю 3, которыми я пользовалась при построении рассмотренных магических кубов. Сначала использовала шаблон, состоящий только из вычетов 1 и 2 по модулю 3 (рис. 4). Этот шаблон не предусматривает использование при составлении куба простого числа 3.

1	1	2	2
1	1	2	2
2	2	1	1
2	2	1	1

1	1	2	2
2	1	2	1
1	2	1	2
2	2	1	1

2	2	1	1
1	2	1	2
2	1	2	1
1	1	2	2

2	2	1	1
2	2	1	1
1	1	2	2
1	1	2	2

Рис. 4

Затем попробовала использовать шаблон из вычетов по модулю 3, в котором присутствует вычет 0 (рис. 5). Этот шаблон предусматривает использование простого числа 3. Именно по этому шаблону мне удалось найти решение с магической константой S=780.

2	1	1	2
1	1	2	2
1	2	2	1
2	2	1	1

1	1	2	2
2	1	2	1
1	2	1	2
2	2	1	1

1	2	2	1
1	2	1	2
0	1	1	1
1	1	2	2

2	2	1	1
2	2	1	1
1	1	2	2
1	1	2	2

Рис. 5

Пробовала использовать и шаблоны из вычетов по модулю 5 (рис. 6 - 7), но безуспешно.

2	4	3	1
1	2	1	1
1	2	3	4
1	2	3	4

3	4	4	4
4	2	2	2
4	3	1	2
4	1	3	2

3	3	1	3
4	3	4	4
2	3	4	1
1	1	1	2

2	4	2	2
1	3	3	3
3	2	2	3
4	1	3	2

Рис. 6

1	2	3	4
3	2	1	4
4	4	4	3
2	2	2	4

1	1	4	4
3	2	1	4
4	3	2	1
2	4	3	1

2	4	1	3
2	3	1	4
3	2	1	4
3	1	2	4

1	3	2	4
2	3	2	3
4	1	3	2
3	3	3	1

Рис. 7

Много времени я потратила на попытку построить куб с магической константой S=750; удалось получить приближение к решению, в котором только один элемент плохой в том смысле, что он повторяется, это элемент 241. Вы видите это приближение на рис. 8.

5	7	337	401
367	241	83	59
151	311	107	181
227	191	223	109

31	43	359	317
233	277	137	103
433	173	97	47
53	257	157	283

271	449	17	13
79	101	331	239
3	139	379	229
397	61	23	269

443	251	37	19
71	131	199	349
163	127	167	293
73	241	347	89

Рис. 8

Задача построения наименьшего простого магического куба 4-го порядка из различных простых чисел остаётся открытой. Есть головоломка на сайте primepuzzles.net, посвящённая этой задаче (см. [2]). Приглашаю читателей к решению этой задачи. Вы можете отправлять ваши решения на сайт primepuzzles.net или мне (адрес в конце статьи).

ОБЩАЯ ФОРМУЛА АССОЦИАТИВНОГО КУБА ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА

Определение

Магический куб называется ассоциативным (центрально-симметричным), если сумма любых двух элементов куба, симметрично расположенных относительно центра куба, равна одному и тому же числу, называемому константой ассоциативности куба.

Замечу, что все магические кубы третьего порядка являются ассоциативными.

На рис. 9 изображена схема ассоциативного куба 4-го порядка, на основе которой была получена общая формула таких кубов.

x1	x2	x3	y1
x4	x5	x6	y2
x7	x8	x9	y3
y4	y5	y6	y7

x10	x11	x12	y8
x13	x14	x15	y9
x16	x17	x18	y10
y11	y12	y13	y14

k-y14	k-y13	k-y12	k-y11
k-y10	k-x18	k-x17	k-x16
k-y9	k-x15	k-x14	k-x13
k-y8	k-x12	k-x11	k-x10

k-y7	k-y6	k-y5	k-y4
k-y3	k-x9	k-x8	k-x7
k-y2	k-x6	k-x5	k-x4
k-y1	k-x3	k-x2	k-x1

Рис. 9

Здесь xi (i=1, 2, …, 18) – переменные первого уровня (среди них есть свободные и зависимые); yi (i=1, 2, …, 14) – переменные второго уровня, все эти переменные зависимые; k – константа ассоциативности куба, это свободная переменная. Магическая константа ассоциативного куба 4-го порядка связана с константой ассоциативности следующей формулой:

$$S = 2k$$

Система линейных уравнений, описывающих ассоциативный куб 4-го порядка:

x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+x11+x12+x13+x14+x15+x16+x17+x18=8k
x2+x3+x6+x9+x11+x12+x15+x18=4k
x2+x3+x5+x8+x11+x12+x14+x17=4k
x4+x7+x8+x9+x13+x16+x17+x18=4k
x5-x9+x14-x18=0
x6-x8+x15-x17=0
x4+x5+x6+x7+x13+x14+x15+x16=4k
x2+x3-x4-x7+x11+x12-x13-x16=0

Решив эту систему, получаем общую формулу ассоциативного куба 4-го порядка:

x1 = x1
x3 = 4*k - x11 - x12 - x17 - x18 - x2 - x8 - x9,
x4 = 4*k - x13 - x16 - x17 - x18 - x7 - x8 - x9,
x5 = -x14 + x18 + x9,
x6 = -x15 + x17 + x8,
x10 = x10

В полученной формуле имеем 14 свободных переменных xi (первого уровня) плюс константа ассоциативности k – тоже свободная переменная, и 4 зависимых переменных xi. Как вычислять зависимые переменные второго уровня yi, видно из схемы куба (рис. 9). Например:

$$y1 = s - x1 - x2 - x3$$

Программно реализовав полученную общую формулу, я начала поиск ассоциативных кубов 4-го порядка из различных простых чисел.

Отмечу, что в Интернете я нашла только один ассоциативный куб 4-го порядка из различных простых чисел, его магическая константа S=19740, константа ассоциативности k=9870 (см. рис. 10 и [1]).

5851	5743	6143	2003
4547	8573	283	6337
7919	863	6991	3967
1423	4561	6323	7433

8243	4877	6007	613
6073	5521	2333	5813
4231	1753	7103	6653
1193	7589	4297	6661

3209	5573	2281	8677
3217	2767	8117	5639
4057	7537	4349	3797
9257	3863	4993	1627

2437	3547	5309	8447
5903	2879	9007	1951
3533	9587	1297	5323
7867	3727	4127	4019

Рис. 10

Этот магический куб обладает ещё одним свойством помимо ассоциативности – он пантриагональный.

Я взяла массив из 64 простых чисел, из которых составлен этот куб, и по своей формуле получила такой ассоциативный куб, составленный из данных чисел (рис. 11):

2003	4297	8447	4993
6073	863	8243	4561
6143	6661	283	6653
5521	7919	2767	3533

3863	2437	7589	5851
6323	613	6991	5813
4231	8573	1193	5743
5323	8117	3967	2333

7537	5903	1753	4547
4127	8677	1297	5639
4057	2879	9257	3547
4019	2281	7433	6007

6337	7103	1951	4349
3217	9587	3209	3727
5309	1627	9007	3797
4877	1423	5573	7867

Рис. 11

У меня получилось другое решение, не эквивалентное известному решению из Интернета. Правда, свойством пантриагональности построенный мной куб не обладает.

Далее я начала поиск решений с меньшими магическими константами. В Приложении вы можете посмотреть все ассоциативные кубы 4-го порядка из простых чисел, найденные мной. Здесь я покажу минимальное решение с магической константой S=1260 (рис. 12):

23	521	433	283
373	29	457	401
587	139	11	523
277	571	359	53

263	379	557	61
613	13	131	503
317	449	31	463
67	419	541	233

397	89	211	563
167	599	181	313
127	499	617	17
569	73	251	367

577	271	59	353
107	619	491	43
229	173	601	257
347	197	109	607

Рис. 12

Константа ассоциативности этого куба K=630.

Покажу этот куб на объёмной картинке (рис. 12а):

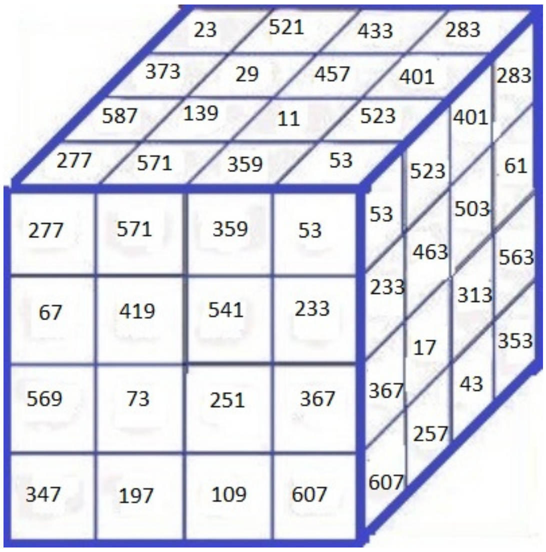

Рис. 12а

Этот ассоциативный куб построен из чисел следующего массива, состоящего из 41 комплементарных пар простых чисел с константой комплементарности равной 630:

11 13 17 23 29 31 37 43 53 59 61 67 73 83 89 107 109 127 131 139 151 163 167 173 181 191 197 199 211 229 233 241 251 257 263 271 277 281 283 293 313 317 337 347 349 353 359 367 373 379 389 397 401 419 431 433 439 449 457 463 467 479 491 499 503 521 523 541 547 557 563 569 571 577 587 593 599 601 607 613 617 619

Очевидно, что для построения ассоциативного куба 4-го порядка необходимо не менее 32 комплементарных пар чисел.

Я составила последовательность магических констант ассоциативных кубов 4-го порядка из простых чисел для OEIS (см. [3]). Эта последовательность имеет вид:

1260, 1320, 1380, 1428, 1440, 1500

Ряд потенциальных магических констант для таких кубов продолжается так:

1512, 1548, 1560, 1584, 1596, 1608, 1620, 1632

Для магической константы S=1548 моя программа не нашла решение. Для магических констант 1560, 1596 и 1620 решения найдены (они приведены в Приложении); остальные магические константы требуют проверки. Интересно: когда решение существует, оно находится довольно быстро; а когда решения нет, программа выполняет полный перебор и потому работает очень долго. Однако, не выполнив полный перебор, нельзя с уверенностью сказать, что решения не существует. В настоящий момент выполняю проверку магической константы S=1512.

Отмечу, что для построения ассоциативных кубов 4-го порядка из простых чисел годится шаблон из вычетов по модулю 3, изображённый на рис. 4. Я пользовалась этим шаблоном при поиске некоторых решений. Применение шаблона сильно уменьшает время выполнения программы.

ОБЩАЯ ФОРМУЛА СОВЕРШЕННОГО КУБА ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА

Определение

Магический куб называется совершенным, если сумма чисел в диагоналях каждого ортогонального сечения куба равна магической константе куба.

Другими словами, в совершенном кубе все слои, как его ни повернуть, являются магическими квадратами. В совершенном кубе 4-го порядка имеем 76 магических рядов.

В 1640 году П. Ферма построил “почти совершенный” классический куб 4-го порядка (рис. 13).

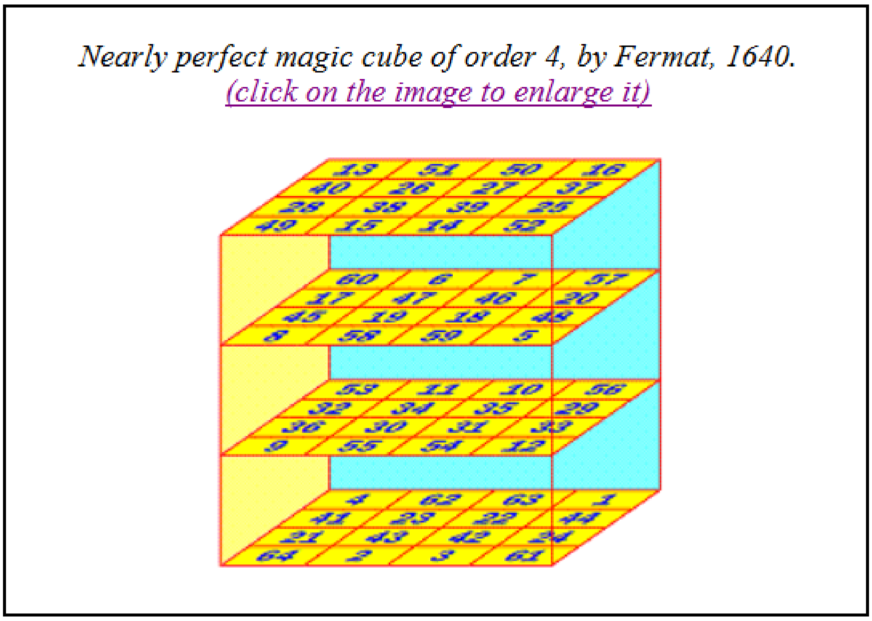

Рис. 13

“More than three centuries before, in 1640, Pierre de Fermat sent Mersenne a nearly perfect magic cube of order 4, with 64 magic lines: Fermat made a mistake announcing 72 magic lines in his cube, but 64 remains an excellent result compared to the needed 76 theoretical magic lines of a perfect magic cube of order 4 that we know now to be impossible.” (см. [4])

Доказано, что классического совершенного куба 4-го порядка не существует.

Меня заинтересовал вопрос: можно ли построить нетрадиционный совершенный куб 4-го порядка. Для решения этой задачи сначала я получила общую формулу такого куба.

На рис. 14 вы видите схему совершенного куба 4-го порядка, по которой я составляла систему уравнений.

X1	X2	X3	Y4
X13	X7	X9	Y14
Y15	Y10	Y8	Y16
X5	Y11	Y12	Y6

X21	X22	X23	Y24
X33	X27	X29	Y34
Y35	Y30	Y28	Y36
X25	Y31	Y32	Y26

X41	X42	X43	Y44
X53	X47	X49	Y54
Y55	Y50	Y48	Y56
X45	Y51	Y52	Y46

X61	X62	X63	Y64
X73	X67	X69	Y74
Y75	Y70	Y68	Y76
X65	Y71	Y72	Y66

Рис. 14

При составлении уравнений, описывающий свойства совершенного куба, я учла тот факт, что все слои совершенного куба 4-го порядка являются магическими квадратами 4-го порядка, и использовала общую формулу М. Алексеева для магических квадратов 4-го порядка ([5]).

В приведённой схеме Xi (i=1, 2, …, 69, но не подряд) – переменные первого уровня; среди этих переменных есть свободные и зависимые; Yi (i=1, 2, …, 76, но не подряд) – переменные второго уровня; все эти переменные зависимые.

На иллюстрации (рис. 15) вы видите схему совершенного куба 4-го порядка и общую формулу магического квадрата 4-го порядка М. Алексеева.

Scheme unconventional perfect cube of order 4

X1	X2	X3	Y4
X13	X7	X9	Y14
Y15	Y10	Y8	Y16
X5	Y11	Y12	Y6

X21	X22	X23	Y24
X33	X27	X29	Y34
Y35	Y30	Y28	Y36
X25	Y31	Y32	Y26

X41	X42	X43	Y44
X53	X47	X49	Y54
Y55	Y50	Y48	Y56
X45	Y51	Y52	Y46

X61	X62	X63	Y64
X73	X67	X69	Y74
Y75	Y70	Y68	Y76
X65	Y71	Y72	Y66

The general formula of a magic square of order 4 by Max Alekseev
http://dxdy.ru/post291286.html#p291286

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_{13} & x_7 & x_9 & x_{14} \\ x_{15} & x_{10} & x_8 & x_{16} \\ x_5 & x_{11} & x_{12} & x_6 \end{bmatrix}$$

Независимыми переменными здесь являются x_1, x_2, x_3, x_5, x_7, x_9, x_{13}, **зависимыми:**

$$\begin{cases} x_4 = S - x_1 - x_2 - x_3 \\ x_6 = x_2 + x_3 - x_5 \\ x_8 = x_4 + x_5 - x_7 \\ x_{10} = x_1 + x_6 - x_9 \\ x_{11} = -x_2 + x_8 + x_9 \\ x_{12} = -x_3 + x_7 + x_{10} \\ x_{14} = S - x_7 - x_9 - x_{13} \\ x_{15} = S - x_1 - x_5 - x_{13} \\ x_{16} = x_7 + x_9 - x_{15} \end{cases}$$

Рис. 15

Это система линейных уравнений для совершенного куба 4-го порядка, написанная по приведённой схеме:

Колонны
x1+x21+x41+x61=s
x2+x22+x42+x62=s
x3+x23+x43+x63=s
x13+x33+x53+x73=s
x7+x27+x47+x67=s
x9+x29+x49+x69=s
x5+x25+x45+x65=s

пространственные диагонали
x1+x27-x41-x42-x43+x45-x47+x62+x63-x65=0
-x1-x2-x3+x29+x65+x41-x49+x42+x43-x45=0
x5+x21-x29+x22+x23-x25-x61-x62-x63+x49=0
x2+x3-x5-x21-x22-x23+x25-x27+x47+x61=0

диагонали в ортогональных сечениях
x1+x22+x43-x61-x62-x63=0
-x1-x2-x3+x23+x42+x61=0
x13+x27+x49-x67-x69-x73=0
-x7-x9-x13+x29+x47+x73=0
-x1-x5-x13+x21+x22+x23-x25-x29-x41-x42-x43+x45-x47+x67+x69+x61+x65+x73=0
x7+x9+x1+x5+x13-x21-x22-x23+x25-x27+x41+x42+x43-x45-x49-x61-x65-x73=0
x5-2*x22+x29+x25-x27-x21-x23+x47+x41+x42-x45-x49+x62+x63-x65=0
x2+x3-x5+x27+x21-x29+x22-x25-2*x42+x49-x41-x43+x45-x47+x65=0
-x1-x2-x3-x27-x29-x33+x47+x49+x41+x45+x53+x62+x63-x65=0
x2+x3-x5+x27+x29+x21+x25+x33-x47-x49-x53-x61-x62-x63=0
x3+x29-x41-x42-x43+x45-x47+x67+x61-x69+x62-x65=0
x7+x1-x9+x2-x5-x21-x22-x23+x25-x27+x49+x63=0
x2+x27+x41-x49+x42+x43-x45-2*x62+x69+x65-x67-x61-x63=0
-2*x2-x1-x3+x5-x7+x9+x21-x29+x22+x23-x25+x47+x62=0
x1+x33-x41-x45-x53+x65=0
x5-x21-x25-x33+x53+x61=0

В системе 27 уравнений и 29 неизвестных (28 элементов куба плюс магическая константа s). Использование переменных двух уровней и общей формулы магического квадрата 4-го порядка позволило мне резко сократить количество уравнений и неизвестных.

Коллега Д. Ежов (единственный участник конкурса «Магические кубы из простых чисел») помог решить систему в матпакете “Wolfram-Mathematica”.

Решение системы уравнений для совершенного куба 4-го порядка

x67 = x69 - x7 + x9
x62 = -x63 + x69 + x9
x61 = -x65 + x69 + x9
x5 = -x65 + x69 + x9
x47 = -x49 + x69 + x9
x43 = x45 - x49 + x53 - x63 – 3*x65 + 2*x69 - x7 + x73 + 2*x9
x42 = x45 + x49 + x53 + x63 + x65 – 2*x69 + x73 – 3*x9
x41 = -x45 + 2*x49 – 2*x53 + 2*x65 + x7 – 2*x73 + x9
x33 = 2*x49 - x53 + x7 – 2*x73 + x9
x3 = 2*x49 + x63 + 2*x65 – 2*x69 + x7 – 3*x9
x29 = -x49 + x69 + x9
x27 = x49
x25 = -x45 + x69 + x9
x23 = -x45 - x49 - x53 - x63 + x65 + 2*x69 - x73 + 3*x9
x22 = -x45 + x49 - x53 + x63 + x65 + x7 - x73
x21 = x45 – 2*x49 + 2*x53 – 2*x65 + x69 - x7 + 2*x73
x2 = -2*x49 - x63 – 2*x65 + 3*x69 - x7 + 4*x9
x13 = -2*x49 + 2*x69 - x7 + x73 + x9
x1 = x65
s = 2*x69 + 2*x9

Вычисление зависимых переменных второго уровня Yi выполняется по общей формуле магического квадрата 4-го порядка, изображённой на рис. 15.

Замечание: зависимые переменные xi в формуле М. Алексеева у меня стали зависимыми переменными второго уровня yi. Например:

y4 = s –x1 – x2 – x3
y6 = x2 + x3 – x5
и т. д.

Во втором слое куба формулы будут такими:

y24 = s –x21 – x22 – x23
y26 = x22 + x23 – x25
и т. д.

Если вы посмотрите на полученную общую формулу совершенного куба 4-го порядка, увидите, что такой куб не может быть составлен из различных чисел, так как имеем одинаковые элементы:

x61 = -x65 + x69 + x9
x5 = -x65 + x69 + x9
x27 = x49
x1 = x65
x47 = -x49 + x69 + x9
x29 = -x49 + x69 + x9

Следовательно, нетрадиционный совершенный куб 4-го порядка может быть составлен только с повторяющимися элементами.

Программно реализовав полученную общую формулу, я построила несколько нетрадиционных совершенных кубов 4-го порядка. Кстати, замечу: в определении нетрадиционного магического квадрата/куба не присутствует явно требование различности всех элементов. Поэтому можно считать, что построенные нетрадиционные совершенные кубы 4-го порядка вполне допустимые, ибо они удовлетворяют всем свойствам совершенного куба. Другое дело – классический совершенный куб: он должен быть составлен из чисел от 1 до 64, все различные числа, а такой совершенный куб составить невозможно.

Первый нетрадиционный совершенный куб 4-го порядка я составила из произвольных натуральных чисел (рис. 16).

203	275	207	279
317	209	211	227
165	195	349	255
279	285	197	203

461	151	85	267
117	251	231	365
151	231	251	331
235	331	397	1

21	321	407	215
255	231	251	227
441	251	231	41
247	161	75	481

279	217	265	203
275	273	271	145
207	287	133	337
203	187	295	279

Рис. 16

Посмотрев внимательно на этот совершенный куб, я обнаружила, что он составлен из комплементарных пар чисел.

S=2(x9+x69), где k=x9+x69 есть константа комплементарности.

Далее я построила несколько совершенных кубов 4-го порядка из простых чисел. Вы можете посмотреть их в Приложении. Здесь покажу минимальный совершенный куб 4-го порядка из простых чисел с магической константой S=336 (рис. 17).

97	41	127	71
107	101	31	97
61	163	41	71
71	31	137	97

149	71	97	19
11	79	89	157
37	89	79	131
139	97	71	29

19	97	71	149
157	89	79	11
131	79	89	37
29	71	97	139

71	127	41	97
61	67	137	71
107	5	127	97
97	137	31	71

Рис. 17

При построении совершенных кубов 4-го порядка из простых чисел использовался такой шаблон из вычетов по модулю 4 (рис. 18):

3	3	3	3
1	1	3	3
1	3	1	3
3	1	1	3

1	3	1	3
1	3	3	1
3	3	3	3
3	3	1	1

1	1	3	3
3	3	3	3
1	3	3	1
3	1	3	1

3	1	1	3
3	1	3	1
3	3	1	1
3	3	3	3

Рис. 18

МАГИЧЕСКИЙ КУБ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА ИЗ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

Задачей построения магического куба 4-го порядка из последовательных простых чисел я занималась очень мало. Нашла несколько потенциальных массивов простых чисел для таких кубов. Показываю эти массивы:

№1
79 83 89 97 101 103 107 109 113 127 131 137 139 149 151 157 163 167 173 179
181 191 193 197 199 211 223 227 229 233 239 241 251 257 263 269 271 277 281
283 293 307 311 313 317 331 337 347 349 353 359 367 373 379 383 389 397 401
409 419 421 431 433 439
S = 1008

№2
103 107 109 113 127 131 137 139 149 151 157 163 167 173 179 181 191 193 197
199 211 223 227 229 233 239 241 251 257 263 269 271 277 281 283 293 307 311
313 317 331 337 347 349 353 359 367 373 379 383 389 397 401 409 419 421 431
433 439 443 449 457 461 463
S = 1122

№3
109 113 127 131 137 139 149 151 157 163 167 173 179 181 191 193 197 199 211
223 227 229 233 239 241 251 257 263 269 271 277 281 283 293 307 311 313 317
331 337 347 349 353 359 367 373 379 383 389 397 401 409 419 421 431 433 439
443 449 457 461 463 467 479
S = 1168

№4
359 367 373 379 383 389 397 401 409 419 421 431 433 439 443 449 457 461 463
467 479 487 491 499 503 509 521 523 541 547 557 563 569 571 577 587 593 599
601 607 613 617 619 631 641 643 647 653 659 661 673 677 683 691 701 709 719
727 733 739 743 751 757 761
S = 2232

№5
397 401 409 419 421 431 433 439 443 449 457 461 463 467 479 487 491 499 503
509 521 523 541 547 557 563 569 571 577 587 593 599 601 607 613 617 619 631
641 643 647 653 659 661 673 677 683 691 701 709 719 727 733 739 743 751 757
761 769 773 787 797 809 811
S = 2388

№6

541 547 557 563 569 571 577 587 593 599 601 607 613 617 619 631 641 643 647
653 659 661 673 677 683 691 701 709 719 727 733 739 743 751 757 761 769 773
787 797 809 811 821 823 827 829 839 853 857 859 863 877 881 883 887 907 911
919 929 937 941 947 953 967
S = 2976

Разумеется, этот ряд потенциальных массивов можно продолжить. Каждый массив состоит из 64 последовательных простых чисел таких, что сумма всех чисел массива кратна 16. Разделив сумму всех чисел массива на 16, мы получаем значение магической константы куба S.

Ни одного куба 4-го порядка из последовательных простых чисел мне построить не удалось. Нашла только несколько приближений к решению, например, такое (рис. 19):

79	127	419	383
277	421	179	131
263	107	199	439
389	353	211	55

97	313	239	359
311	229	83	385
373	137	349	149
227	329	337	115

401	251	193	163
223	173	379	233
101	433	167	307
283	151	269	305

431	317	157	103
197	185	367	259
271	331	293	113
109	175	191	533

Рис. 19

Элементы, выделенные красным цветом, не являются простыми числами. Это куб с магической константой S=1008.

В заключение отмечу, что магические кубы 4-го порядка используются в построении окаймлённых (концентрических) магических кубов 6-го порядка.

Я нашла такой окаймлённый куб 6-го порядка в Интернете [1] (рис. 20):

4831	4783	67	9811	4639	5479
191	241	193	9473	9769	9743
331	577	5009	4751	9619	9323
8273	9719	8933	1123	829	733
8423	7499	8287	1789	1801	1811
7561	6791	7121	2663	2953	2521

131	761	379	9403	9497	9439
8951	2437	3547	5309	8447	919
9643	3209	5573	2281	8677	227
2143	8243	4877	6007	613	7727
8311	5851	5743	6143	2003	1559
431	9109	9491	467	373	9739

337	8849	8821	1409	1307	8887
7013	5903	2879	9007	1951	2857
8009	3217	2767	8117	5639	1861
9049	6073	5521	2333	5813	821
4219	4547	8573	283	6337	5651
983	1021	1049	8461	8563	9533

8543	8839	9277	173	1831	947
4177	3533	9587	1297	5323	5693
7487	4057	7537	4349	3797	2383
31	4231	1753	7103	6653	9839
449	7919	863	6991	3967	9421
8923	1031	593	9697	8039	1327

8419	3299	8317	1607	5419	2549
9151	7867	3727	4127	4019	719
3593	9257	3863	4993	1627	6277
977	1193	7589	4297	6661	8893
149	1423	4561	6323	7433	9721
7321	6571	1553	8263	4451	1451

7349	3079	2749	7207	6917	2309
127	9629	9677	397	101	9679
547	9293	4861	5119	251	9539
9137	151	937	8747	9041	1597
8059	2371	1583	8081	8069	1447
4391	5087	9803	59	5231	5039

Рис. 20

Внутри этого окаймлённого куба 6-го порядка находится ассоциативный магический куб 4-го порядка с магической константой S=19740. Магическая константа окаймлённого куба 6-го порядка S=29610.

Меня очень заинтересовала задача построения окаймлённых кубов, и я её решила, нашла решение для кубов порядков 6 и 7, причём окаймлённые кубы 6-го порядка построила с гораздо меньшими магическими константами, чем константа куба из Интернета. Покажу здесь два решения. На иллюстрации (рис. 21) вы видите готовое окаймление для куба 6-го порядка, в которое надо вставить магический куб 4-го порядка. При этом я вставила в окаймление не ассоциативный куб 4-го порядка с магической константой S=4020.

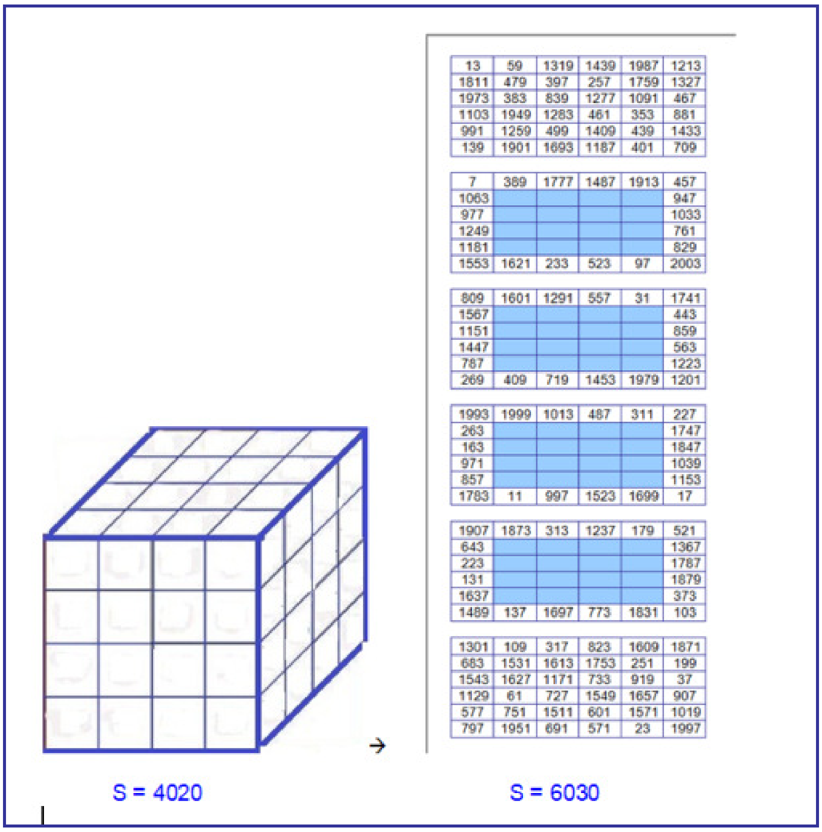

Рис. 21

На рис. 22 показан готовый окаймлённый куб 6-го порядка с магической константой S=6030.

13	59	1319	1439	1987	1213
1811	479	397	257	1759	1327
1973	383	839	1277	1091	467
1103	1949	1283	461	353	881
991	1259	499	1409	439	1433
139	1901	1693	1187	401	709

7	389	1777	1487	1913	457
1033	1861	19	641	1499	977
643	877	1597	1373	173	1367
1847	1193	71	1459	1297	163
947	89	2333	547	1051	1063
1553	1621	233	523	97	2003

809	1601	1291	557	31	1741
1567	151	73	1667	2129	443
1151	953	1723	587	757	859
787	283	1733	1303	701	1223
1447	2633	491	463	433	563
269	409	719	1453	1979	1201

1993	1999	1013	487	311	227
79	449	1889	1471	211	1931
347	1279	107	2017	617	1663
941	1061	1867	431	661	1069
887	1231	157	101	2531	1123
1783	11	997	1523	1699	17

1907	1873	313	1237	179	521
857	1559	2039	241	181	1153
373	911	593	43	2473	1637
223	1483	349	827	1361	1787
1181	67	1039	2909	5	829
1489	137	1697	773	1831	103

1301	109	317	823	1609	1871
683	1531	1613	1753	251	199
1543	1627	1171	733	919	37
1129	61	727	1549	1657	907
577	751	1511	601	1571	1019
797	1951	691	571	23	1997

Рис. 22

Мне удалось построить ещё окаймлённый куб 6-го порядка с магической константой S=5670 (рис. 23). Внутри этого окаймлённого куба находится не ассоциативный куб 4-го порядка с магической константой S=3780.

В мои планы входит написание статьи о методе окаймления. В этой статье я расскажу и о замечательном окаймлённом кубе 7-го порядка из различных простых чисел. Внутри этого куба находятся магические кубы 3-го и 5-го порядков. Очень похоже на русскую матрёшку. В Интернете есть аналогичный окаймлённый куб 8-го порядка. [1]

971	761	1801	367	157	1613
1447	379	491	1031	569	1753
1033	1667	1709	281	877	103
1117	1777	419	457	1607	293
461	23	787	1723	797	1879
641	1063	463	1811	1663	29

607	409	719	1877	1627	431
1543	1039	31	887	1823	347
599	439	2311	383	647	1291
233	353	557	2371	499	1657
1229	1949	881	139	811	661
1459	1481	1171	13	263	1283

937	149	1303	677	983	1621
1553	97	307	2069	1307	337
727	2267	523	317	673	1163
653	967	1451	271	1091	1237
1531	449	1499	1123	709	359
269	1741	587	1213	907	953

1277	1693	19	1289	829	563
593	53	2333	751	643	1297
1423	991	107	373	2309	467
311	2423	571	659	127	1579
739	313	769	1997	701	1151
1327	197	1871	601	1061	613

17	1831	401	1381	1847	193
397	2591	1109	73	7	1493
101	83	839	2707	151	1789
1759	37	1201	479	2063	131
1699	1069	631	521	1559	191
1697	59	1489	509	43	1873

1861	827	1427	79	227	1249
137	1511	1399	859	1321	443
1787	223	181	1609	1013	857
1597	113	1471	1433	283	773
11	1867	1103	167	1093	1429
277	1129	89	1523	1733	919

Рис. 23

Остаётся добавить, что я не рассматривала построение пандиагональных и пантриагональных кубов 4-го порядка из простых чисел. Пантриагональный куб 4-го порядка из простых чисел известен (см. рис. 10). Пандиагонального куба я не встречала.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Здесь приведены магические кубы 4-го порядка из простых чисел, которые мне удалось построить, не вошедшие в основной текст статьи.

1. Простые магические кубы 4-го порядка

Ещё раз напомню: простой магический куб (по-английски: simple magic cube) – это магический куб, не обладающий никакими дополнительными свойствами.

7 1999 17 1997
1753 181 1823 263
257 1613 727 1423
2003 227 1453 337

1873 37 1979 131
311 1129 1259 1321
1699 1367 43 911
137 1487 739 1657

233 1013 991 1783
1069 1733 541 677
941 661 1301 1117
1777 613 1187 443

1907 971 1033 109

887 977 397 1759
1123 379 1949 569
103 1693 641 1583

S = 4020

Решение не эквивалентно известному решению из Интернета (см. рис. 3).
Ещё один простой магический куб 4-го порядка с такой магической константой вы видите внутри окаймлённого куба 6-го порядка (рис. 22).

***

7 73 587 593
193 577 257 233
557 383 307 13
503 227 109 421

37 139 563 521
251 571 167 271
541 107 163 449
431 443 367 19

599 479 79 103
457 59 607 137
5 373 281 601
199 349 293 419

617 569 31 43
359 53 229 619
157 397 509 197
127 241 491 401

S = 1260

***

7 31 569 593
97 499 293 311
587 401 109 103
509 269 229 193

13 163 521 503
257 523 47 373
571 83 349 197
359 431 283 127

563 557 37 43
463 41 547 149
23 379 389 409
151 223 227 599

617 449 73 61
383 137 313 367
19 337 353 491
181 277 461 281

S=1200

***

7 19 401 593
61 541 281 137
389 353 97 181
563 107 241 109

13 139 521 347
359 349 5 307
457 101 223 239
191 431 271 127

383 569 31 37
547 71 313 89
17 229 197 577
73 151 479 317

617 293 67 43
53 59 421 487
157 337 503 23
193 331 29 467

S = 1020

***

7 19 443 521
61 607 41 281
491 227 193 79
431 137 313 109

13 139 449 389
509 307 47 127
379 83 211 317
89 461 283 157

353 563 31 43
349 53 439 149
17 223 419 331
271 151 101 467

617 269 67 37
71 23 463 433
103 457 167 263
199 241 293 257

S = 990

***

7 19 311 593
73 541 167 149
383 317 103 127
467 53 349 61

13 151 509 257
479 283 29 139
367 107 229 227
71 389 163 307

293 521 79 37
331 23 313 263
113 109 137 571
193 277 401 59

617 239 31 43
47 83 421 379
67 397 461 5
199 211 17 503

S = 930

***

7 19 281 593
103 499 191 107
401 269 157 73
389 113 271 127

13 139 509 239
419 349 53 79
331 101 109 359
137 311 229 223

263 563 43 31
307 47 373 173
17 193 251 439
313 97 233 257

617 179 67 37
71 5 283 541
151 337 383 29
61 379 167 293

S = 900

***

7 19 251 593
163 499 101 107
389 239 181 61
311 113 337 109

13 139 521 197
479 241 47 103
367 173 73 257
11 317 229 313

233 563 31 43
223 71 349 227
17 79 353 421
397 157 137 179

617 149 67 37
5 59 373 433
97 379 263 131
151 283 167 269

S =870

***

7 19 347 467
97 337 233 173
257 401 109 73
479 83 151 127

13 139 419 269
227 373 17 223
499 11 163 167
101 317 241 181

311 431 31 67
463 41 313 23
5 157 107 571
61 211 389 179

509 251 43 37
53 89 277 421
79 271 461 29
199 229 59 353

S = 840

***

7 19 317 467
193 337 107 173
359 197 157 97
251 257 229 73

13 139 389 269
137 421 41 211
313 149 181 167
347 101 199 163

281 419 67 43
367 47 379 17
11 241 71 487
151 103 293 263

509 233 37 31
113 5 283 409
127 223 401 59
61 349 89 311

S = 810

***

А это шаблон из вычетов по модулю 8, который тоже пыталась использовать при построении простых магических кубов, но безуспешно:

1 7 7 5
3 7 3 7
3 3 7 7
5 3 3 1

3 5 1 3
7 7 3 3
1 3 3 5
1 5 5 1

3 3 7 7
5 3 7 5
3 7 1 1
1 7 5 7

5 5 5 5
5 3 7 5
5 7 1 7
5 5 7 3

В заключение – очень интересный *полумагический* куб 4-го порядка с магической константой S=750:

313 103 53 281
7 13 311 419
29 383 307 31
401 251 79 19

37 211 233 269
71 373 23 283
463 107 163 17
179 59 331 181

11 263 337 139
541 137 67 5
101 151 89 409
97 199 257 197

389 173 127 61
131 227 349 43
157 109 191 293
73 241 83 353

По аналогии с магическими квадратами полумагическим кубом я назвала куб, в котором нет нужной суммы (равной магической константе) в четырёх пространственных диагоналях.

Очень долго пыталась построить магический куб с константой 750. Написала несколько разных программ (и с использованием шаблонов, и со случайной генерацией двух слоёв куба). Так и не удалось найти решение, зато совершенно случайно получила полумагический куб.

2. Ассоциативные кубы 4-го порядка

Покажу сначала классический ассоциативный куб 4-го порядка, построенный по полученной мной общей формуле:

1 30 43 56
8 19 61 42
59 48 2 21
62 33 24 11

28 7 50 45
29 10 40 51
34 53 27 16
39 60 13 18

47 52 5 26
49 38 12 31
14 25 55 36
20 15 58 37

54 41 32 3
44 63 17 6
23 4 46 57
9 22 35 64

K=65, S = 130

Ну, классические ассоциативные кубы 4-го порядка известны давно, примеры таких кубов приведены в первой части статьи.

Далее приведены ассоциативные кубы из простых чисел, начиная со второго, следующего за минимальным кубом, имеющим магическую константу S=1260 (этот куб показан в основном тексте статьи). Для каждого решения указана константа ассоциативности K и магическая константа S.

173 409 509 229
479 41 523 277
571 239 7 503
97 631 281 311

197 419 643 61
617 13 83 607
313 367 47 593
193 521 547 59

601 113 139 467
67 613 293 347
53 577 647 43
599 17 241 463

349 379 29 563
157 653 421 89
383 137 619 181
431 151 251 487

K = 660, S = 1320

***

257 227 397 499
383 31 509 457
541 479 7 353
199 643 467 71

43 661 359 317
281 13 563 523
439 593 37 311
617 113 421 229

461 269 577 73
379 653 97 251
167 127 677 409
373 331 29 647

619 223 47 491
337 683 211 149
233 181 659 307
191 293 463 433

K = 690, S = 1380

***

251 317 313 547
491 257 523 157
613 367 5 443
73 487 587 281

83 601 677 67
653 31 137 607
151 293 283 701
541 503 331 53

661 383 211 173
13 431 421 563
107 577 683 61
647 37 113 631

433 127 227 641
271 709 347 101
557 191 457 223
167 401 397 463

K = 714, S = 1428

***

389 311 277 463
677 29 673 61
163 613 11 653
211 487 479 263

73 617 383 367
569 19 571 281
179 631 37 593
619 173 449 199

521 271 547 101
127 683 89 541
439 149 701 151
353 337 103 647

457 241 233 509
67 709 107 557
659 47 691 43
257 443 409 331

K = 720, S = 1440

***

179 131 733 457
401 307 509 283
487 419 7 587
433 643 251 173

641 719 67 73
569 11 523 397
193 613 311 383
97 157 599 647

103 151 593 653
367 439 137 557
353 227 739 181
677 683 31 109

577 499 107 317
163 743 331 263
467 241 443 349
293 17 619 571

K = 750, S = 1500

Эти ассоциативные кубы есть в статье OEIS. [3]
Дальше показаны ассоциативные кубы, которые пока не включены в OEIS, потому что не все потенциальные магические константы в последовательности магических констант проверены.

53 599 631 277
719 19 281 541
751 233 7 569
37 709 641 173

223 643 587 107
467 11 349 733
523 397 23 617
347 509 601 103

677 179 271 433
163 757 383 257
47 431 769 313
673 193 137 557

607 139 71 743
211 773 547 29
239 499 761 61
503 149 181 727

K = 780, S = 1560

***

197 449 619 331
521 79 409 587
739 359 11 487
139 709 557 191

251 569 397 379
727 29 641 199
47 691 97 761
571 307 461 257

541 337 491 227
37 701 107 751
599 157 769 71
419 401 229 547

607 241 89 659
311 787 439 59
211 389 719 277
467 179 349 601

K = 798, S= 1596

***

137 547 587 349
401 157 443 619
661 347 13 599
421 569 577 53

457 101 751 311
307 23 631 659
617 727 167 109
239 769 71 541

269 739 41 571
701 643 83 193
151 179 787 503
499 59 709 353

757 233 241 389
211 797 463 149
191 367 653 409
461 223 263 673

K = 810, S = 1620

Теперь показываю ассоциативные кубы с большими магическими константами, эти магические константы намного больше последней проверенной магической константы S=1620 в последовательности магических констант, начало которой положено в OEIS.

421 1627 953 359
823 97 1217 1223
1637 17 157 1549
479 1619 1033 229

379 1063 1409 509
1553 73 281 1453
1039 1481 13 827
389 743 1657 571

1109 23 937 1291
853 1667 199 641
227 1399 1607 127
1171 271 617 1301

1451 647 61 1201
131 1523 1663 43
457 463 1583 857
1321 727 53 1259

K = 1680, S = 3360

***

103 1879 1571 467
1487 13 1523 997
1951 149 7 1913
479 1979 919 643

941 823 1847 409
1663 11 373 1973
1019 1747 17 1237
397 1439 1783 401

1609 227 571 1613
773 1993 263 991
37 1637 1999 347
1601 163 1187 1069

1367 1091 31 1531
97 2003 1861 59
1013 487 1997 523
1543 439 131 1907

K = 2010, S = 4020

***

919 3331 1913 557
1663 151 2273 2633
3329 17 193 3181
809 3221 2341 349

661 2269 3347 443
3251 103 53 3313
2617 2309 61 1733
191 2039 3259 1231

2129 101 1321 3169
1627 3299 1051 743
47 3307 3257 109
2917 13 1091 2699

3011 1019 139 2551
179 3167 3343 31
727 1087 3209 1697
2803 1447 29 2441

K =3360, S = 6720

***

271 4093 3527 509
3739 109 1811 2741
4133 71 43 4153
257 4127 3019 997

1063 3037 3989 311
4007 61 173 4159
2767 1913 127 3593
563 3389 4111 337

3863 89 811 3637
607 4073 2287 1433
41 4027 4139 193
3889 211 1163 3137

3203 1181 73 3943
47 4157 4129 67
1459 2389 4091 461
3691 673 107 3929

K= 4200, S= 8400

***

613 6571 4349 1667
3517 283 5147 4253
6359 23 271 6547
2711 6323 3433 733

1321 3391 6491 1997
6563 19 149 6469
4363 5273 31 3533
953 4517 6529 1201

5399 71 2083 5647
3067 6569 1327 2237
131 6451 6581 37
4603 109 3209 5279

5867 3167 277 3889
53 6329 6577 241
2347 1453 6317 3083
4933 2251 29 5987

K = 6600, S = 13200

3. Совершенные кубы 4-го порядка

Как отмечено в статье, элементы во всех нетрадиционных совершенных кубах 4-го порядка повторяются.

229 257 283 311
383 101 109 487
157 349 521 53
311 373 167 229

131 521 349 79
311 283 257 229
151 257 283 389
487 19 191 383

409 109 101 461
307 257 283 233
311 283 257 229
53 431 439 157

311 193 347 229
79 439 431 131
461 191 19 409
229 257 283 311

S=1080

***

223 79 383 239
439 29 13 443
23 433 449 19
239 383 79 223

379 389 73 83
89 233 229 373
73 229 233 389
383 73 389 79

83 373 89 379
373 229 233 89
389 233 229 73
79 89 373 383

239 83 379 223
23 433 449 19
439 29 13 443
223 379 83 239

S=924

***

47 61 359 373
103 337 11 389
317 83 409 31
373 359 61 47

73 379 41 347
367 353 67 53
41 67 353 379
359 41 379 61

347 53 367 73
53 67 353 367
379 353 67 41
61 367 53 359

373 347 73 47
317 83 409 31
103 337 11 389
47 73 347 373

S=840

***

97 47 283 233
191 149 13 307
139 181 317 23
233 283 47 97

167 293 37 163
173 223 107 157
37 107 223 293
283 37 293 47

163 157 173 167
157 107 223 173
293 223 107 37
47 173 157 283

233 163 167 97
139 181 317 23
191 149 13 307
97 167 163 233

S=660

***

101 43 167 109
193 19 11 197
17 191 199 13
109 167 43 101

103 199 71 47
79 107 103 131
71 103 107 139
167 11 139 103

107 131 19 163
131 103 107 79
139 107 103 71
43 79 191 107

109 47 163 101
17 191 199 13
193 19 11 197
101 163 47 109

S=420

Веб-сайты

1. Prime Number Magic Cubes: http://www.magic-squares.net/c-t-htm/c_prime.htm
2. Головоломка «Магические кубы из простых чисел» http://www.primepuzzles.net/puzzles/puzz_749.htm
3. Последовательность в OEIS «Магические константы ассоциативных кубов 4-го порядка из простых чисел» http://oeis.org/A240922
4. Сайт Christian Boyer (Франция) http://www.multimagie.com/
5. Научный форум dxdy.ru http://dxdy.ru/post291286.html#p291286
6. Научный форум dxdy.ru, тема «Магические кубы» http://dxdy.ru/topic27852.html

7. Портал Естественный Наук, тема «Магический куб»
http://e-science.ru/forum/index.php?showtopic=31432
8. Сайт S. Tognon, на котором проходил конкурс «Магические кубы из простых чисел»
http://primesmagicgames.altervista.org/wp/competitions/

Присылайте, пожалуйста, ваши отзывы и предложения по адресу
natalimak1@yandex.ru

12 августа 2014 г.
Саратов